TITLE:

# Eichler対応の拡張のための1つのプログラム(整数論と保型形式)

AUTHOR(S):

伊吹山, 知義

数理解析研究所講究録
689巻 1989年 1-24



# Eichler対応の拡張のための1つのプログラム

九州大学教養部　伊吹山 知義（Tomoyoshi Ibukiyama）

異なる代数群上の保型形式の対応に関するLanglands予想について．もともとのEichlerの古典的な結果を自然に拡張する試みを述べてみたい。以前に$Sp(2,\mathbb{R})$と$Sp(2)$の関係については橋本喜一朗氏との共同研究を報告し．また．$Sp(n,\mathbb{R})$と$Sp(n)$についても．unipotent共役類の寄与の比較について．別の機会に報告させていただいたが．これらを一般の有界対称領域に拡張することを一応の目標と考え．そのために考えるべき手続を問題．予想 or 結果として述べたい。第1章では．有界対称領域上の正則保型形式とその次元公式（Siegel保型形式についてのGodementの公式にあたるもの）について．整理しておく。我々に必要な形ではっきり書かれた文献をあまりみかけないので．何かのお役にたてば幸いである。第2章が主要部分であり．基本的方針は．Bruhat-Tits theoryにのせられる部分をなるべく一般的に考察したいと

いうことである。実際に parahoric subgroups は単に保型形式の対応だけではなく，代数幾何的にもかなりはっきりした意味があるので（たとえば supersingular abelian var. の moduli）この方向が十分一般的に開発されることは，非常に面白いことのように思われる。

## 才1章 次元公式

この章では基本的文献として Satake[1], Baily[2] を利用させていただいた。また Shimizu[3] も大変役にたった。古典領域の場合には，伊原信一郎先生の修士論文にも述べられているとおききしている。いずれにせよ，前にも述べたように，この章は基礎事項の整理であるので，引用箇所をいちいち明示しないが，この点御容赦願いたい。

### §1. 保型形式の定義

1-1 Harish-Chandra embedding

$G$を simple algebraic group $/\mathbb{R}$,

$K$を maximal compact subgroup of $G$ とする。

$G^\circ$, $K^\circ$ をそれぞれの（Lie 群としての）connected component とし $G^\circ/K^\circ$ は hermitian symmetric space と仮定する。$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ を $G$, $K$ の Lie 環とする。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan分解とする。

$H_0 \in \mathfrak{z} \subset \mathfrak{k}$ で $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_0)^2 = -1_{\mathfrak{g}}$ なるものをとって

$\mathfrak{p}$ の複素化 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ を

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$$

$$\mathfrak{p}_{\pm} = \{ X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \; ; \; \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_0) X = \pm i X \}$$

と分解する。$G_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}$ を $G$, $K$ の複素化とし、$P_+$, $P_-$ を $\mathfrak{p}_+$, $\mathfrak{p}_-$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の部分群とする。自然に

$$G^0/K^0 \hookrightarrow P_+ K_{\mathbb{C}}^0 P_- / K_{\mathbb{C}}^0 P_- \approx \mathfrak{p}_+$$

なる写像が定義される。これを Harish-Chandra embedding と言い、この写像による $G^0/K^0$ の像を以下 $D$ と書くことにする。 $g \in P_+ K_{\mathbb{C}}^0 P_-$ であれば、 $g = g_+ g_0 g_-$ ($g_+ \in P_+$, $g_0 \in K_{\mathbb{C}}^0$, $g_- \in P_-$) と一意的に分解するが、この記号のもとで、$G^0$ の $D$ への action は、

$$\exp(g(z)) = (g \cdot \exp z)_+ \qquad (z \in D \subset \mathfrak{p}_+)$$

で定義される。($G^0/K^0$ への自然な action と一致する。)

## 1－2 保型形式の定義

まず保型因子を指定する。$G^0 \times D$ から $K_{\mathbb{C}}^0$ への次のような map を canonical automorphic factor という。

$$G^\circ \times D \ni (g, z) \longrightarrow J(g, z) = (g \cdot \exp z)_0 \in K_{\mathbb{C}}^\circ$$

$J(g, z)$ は次の条件をみたす。

(1) $J(g_1 g_2, z) = J(g_1, g_2 z) J(g_2, z)$

(2) $J(g, 0) = (g)_0$ （$0$ は $D$ の原点）

(3) $J(k, z) = k$ for $\forall z \in D$, $k \in K_{\mathbb{C}}^\circ$

次に、$K^\circ$ の（有限次）ユニタリ表現 $(\chi, V_\chi)$ を考える。$\chi$ は $K_{\mathbb{C}}^\circ$ まで自然に延長される。$G^\circ \times D$ 上の函数 $j_\chi$ を

$$j_\chi(g, z) = \chi(J(g, z)) \in GL(V_\chi)$$

と定義する。以下 $j_\chi$ の形の保型因子のみを考える。（$\mathbb{C}$-valued な保型因子は上の形のものにつきることが知られているが、$\mathbb{C}$-valued でなければ、$j_\chi$ に限るわけではない。）

<u>定義</u> $\Gamma$ を $G^\circ$ の離散部分群で、$\mathrm{vol}(\Gamma \backslash G^\circ) < +\infty$ とする。この時、$V_\chi$-valued な $D$ 上の正則函数 $f$ が、

$$f(\gamma z) j_\chi(\gamma, z) = f(z) \quad \text{for } \forall \gamma \in \Gamma$$

をみたすとき、$f$ を $\Gamma$ に関する weight $\chi$ の保型形式という。

$z \in D$ について $g_z(0) = z$ となるような $g_z \in G^0$ を1つずつ固定しておく。

$$\mathcal{H}^\infty(\chi, \Gamma) = \{ f : D \to V_\chi \ ; \ f \text{ は } \Gamma \text{ に関する weight } \chi \text{ の保型形式でかつ } \sup_{z \in D} \| f(z) j_\chi(g_z, 0) \| < +\infty \}$$

とおく。但し、ここで $\| \ \|$ は $V_\chi$ の $\chi(K^0)$ の作用で不変なノルムとする。$\mathcal{H}^\infty(\chi, \Gamma)$ の元を cusp form という。

## §2. 次元公式

### 2-1 holomorphic $L^2$-space

$D$ 上の $V_\chi$-valued な正則函数全体の集合の部分集合 $\mathcal{H}^2(\chi)$ を次で定義する。

$$\mathcal{H}^2(\chi) = \{ f : D \to V_\chi : f \text{ は正則かつ } (f, f)_{\mathcal{H}^2(\chi)} = \int_D \| f(z) j_\chi(g_z, 0) \|^2 dv_z < +\infty \}$$

但し、$dv_z$ は $D$ の $G^0$-invariant measure である。

$\mathcal{H}^2(\chi)$ には $G^0$ が

$$f(z) \longrightarrow f(gz) j_\chi(g, z)$$

という写像で作用している。また、次の性質をみたす。

(1) $\mathcal{H}^2(\chi)$ は 可分な Hilbert 空間である。

(2) $D$ の任意の compact 集合 $C$ に対してある定数 $c_0$ があって $\|f(z)\| < c_0 (f,f)_{\mathcal{H}^2(\chi)}$ $(z\in C)$

となる。

以上より、一般論から、$\mathcal{H}^2(\chi)$ は再生核を持ち、かつ一意的であることがわかる。但し、ここでいう再生核とは、$D\times D$ 上の $GL(V_\chi)$-valued な函数 $k_\chi(z,w)$ で次の条件 (1), (2) を満たすものを言う。

(1) 任意の $v\in V_\chi$ について、$v\,k_\chi(z,w)$ はその函数として $\mathcal{H}^2(\chi)$ の元。

(2) $(f(z), v\,k_\chi(z,w))_{\mathcal{H}^2(\chi)} = (f(w), v)_{V_\chi}$ for $^\forall v\in V_\chi$

但し、$(\ ,\ )_{V_\chi}$ は、$V_\chi$ の $\chi(K^0)$ 不変内積である。

2-2. $\mathcal{H}^2(\chi)$ の再生核.

$\mathcal{H}^2(\chi)$ の再生核 $k_\chi(z,w)$ を具体的に記述する。まず、$D\times D$ 上の $K_{\mathbb{C}}^0$-valued function $K(z,w)$ を

$$K(z,w) = (((\exp \bar{w})^{-1}\exp z)_0)^{-1}$$

と定義する。ここで $\bar{w}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ における $1\otimes{}^-$ で $w$ を写したものである。$K(z,w)$ を canonical kernel function という。$K_\chi(z,w) = \chi(K(z,w))$ とおく。

この時 $\mathcal{H}^2(\chi)$ の再生核 $k_\chi(z,w)$ は、

$$k_\chi(z,w) = (\mathrm{const}) \times K_\chi(z,w)^{-1}$$

となる。但し、$\mathcal{H}^2(\chi)=\{0\}$ ならば、const $=0$ になる。

$\mathcal{H}^2(\chi)\neq\{0\}$ でかつ $(G^0, \mathcal{H}^2(\chi))$ が discrete series に属する表現ならば、上の定数は、

$$d_\pi \cdot (\dim \chi)^{-1}$$

で与えられる。但し、$d_\pi$ は $(G^0, \mathcal{H}^2(\chi))$ の formal degree $\dim \chi$ は $\chi$ の表現次数である。

## 2-3 $\mathcal{H}^\infty(\chi, \Gamma)$ の再生核

離散群 $\Gamma \subset G^0$ を以前のようにとって、$k_\Gamma(z,w)$ を

$$k_\Gamma(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k_\chi(\gamma z, w)\, j_\chi(\gamma, z) \qquad (z,w)\in D\times D$$

と定義する。一般には、この級数は収束するとは限らないが $(G^0, \mathcal{H}^2(\chi))$ が integrable representation ならば、絶対かつ広義一様に収束して、しかも $\mathcal{H}^\infty(\chi,\Gamma)$ の再生核となる。

## 2-4 次元公式

$\mathcal{H}^2(\chi)$ が integrable ならば、$\mathcal{H}^\infty(\chi,\Gamma)$ の次元公式は、次で与えられる。

$$\dim \mathcal{H}^{\infty}(\pi, \Gamma) = \int_{\Gamma \backslash D} \mathrm{tr}\,( j_\pi(g_z, o)^* k_\Gamma(z, z)\, j_\pi(g_z, o))\, dv_z$$

$$= d_\pi (\dim \pi)^{-1} \int_{\Gamma \backslash G^\circ} \Big( \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{tr}\, (j_\pi(g^{-1}\gamma g, o)) \Big)\, dg$$

ここで $dg$ は $G$ の適当な Haar measure である。（$d_\pi$ 自身 measure のとり方によっているので $d_\pi$ を決めたものと同じ measure をとる必要がある。）

なお，$\mathcal{H}^2(\chi)$ が integrable であるための条件は，Hecht-Schmidt によりわかっている。すなわち，$\Phi$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の root の集合，$\Phi_n$ を non-compact root の集合とし，表現 $\chi$ が，既約で highest weight $\lambda$ を持てば

$$|(\lambda, \beta)| > \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \in \Phi \\ (\alpha, \beta) > 0}} (\alpha, \beta) \qquad \text{for } {}^\forall \beta \in \Phi_n$$

が integrable のための条件である。たとえば $Sp(n, \mathbb{R})$ なら通常の Young diagram の size を $(f_1, \cdots, f_n)$ とかくと

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n > 2n$$

が条件である。

## 第2章 予想とプログラム

### §1. 予想

$G$ を quasi-split alg. group $/\mathbb{Q}$ で absolutely simple
$G'$ を $G$ の inner twist とする。

今表現論一般をめざすつもりはないので、$G/K$ を有界対称領域とし、$G'$ は compact または $G'/K'$ が有界対称領域と仮定する。また、記号等を簡単にするために $G$ は絶対単純かつ強近似定理をみたすと仮定しておく。以下の話の中心は、有界対称領域の部分であるので、$G'$ が compact な時の保型形式の定義は省略する。以下 $G$ と $G'$ 上の保型形式の比較について考えたい。

話を簡単にするために、ここではある固定された素数 $p$ と $\infty$ 素点以外の places $v$ では $G_v \cong G'_v$ と仮定する。(他の場合も同様であるが、記号が複雑になるのを避けたいので。)

$v \neq \infty, p$ について、$U_v$ を $G_v \cong G'_v$ の何らかの意味で standard な maximal compact subgroup とする。(たとえば、$G_v$ の Tits-building 内の special points に対応するもの。) $G_p, G'_p$ の minimal parahoric subgp $B, B'$ を固定し、これらで自然に決まる affine root system を与えて、affine Weyl 群の Coxeter 群としての generator の集合を $G_p, G'_p$ についてそれぞれ $S_{aff}, S'_{aff}$ と書く。$G, G'$ のアデール

化. $G_A$, $G'_A$ 内の open subgroup $\mathcal{U}_\theta$, $\mathcal{U}'_{\theta'}$ をそれぞれ

$$\mathcal{U}_\theta = G_\infty \cdot \left(\prod_{v \neq p,\infty} U_v\right) \cdot U_{\theta'}$$

$$\mathcal{U}'_{\theta'} = G'_\infty \left(\prod_{v \neq p,\infty} U_v\right) \cdot U_{\theta'}$$

で定める。ここで $\theta \subsetneqq S_{aff}$, $\theta' \subsetneqq S'_{aff}$ であり, $U_\theta$, $U'_{\theta'}$ はそれぞれ $\theta$, $\theta'$ に対応する $G_p$ 及び $G'_p$ の parahoric subgp である。特に $G_A$ については $\Gamma_\theta = \mathcal{U}_\theta \cap G_Q$ とおけば, これが保型形式を定義する離散群とみなされる。$\chi$, $\chi'$ を $G_\infty$ $G'_\infty$ の maximal compact subgroup の既約表現とする。

$$S_\chi(\mathcal{U}_\theta) \quad , \quad S_{\chi'}(\mathcal{U}'_{\theta'})$$

で weight $\chi, \chi'$ の $\mathcal{U}_\theta$ or $\mathcal{U}'_{\theta'}$ に関する cusp form の空間とする。($G, G'$ が non compact なら定義は第1章の通り)

<u>予想 1.</u> 適当な $\chi$ と $\chi'$ の組について.

$$\sum_{\theta \subsetneqq S_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} \dim S_\chi(U_\theta) = \sum_{\theta' \subsetneqq S'_{aff}} (-1)^{\#(\theta')} \dim S_{\chi'}(U_{\theta'})$$

ここで $\chi$, $\chi'$ をどのように組合せるかは. Bott-Borel-Weil Th. により決めることができる。(この組合せについては.

織田孝幸氏に御教示願った。）たとえば $Sp(n,\mathbb{R})$ と compact twist $Sp(n)$ ならば、$Sp(n)$ の Young 図形 $(f_1,\cdots,f_n)$ と $GL_n(\mathbb{C})$ の表現 $(f_1+n+1,\cdots,f_n+n+1)$ を対応させる。"holomorphic" な部分をとりだすには、$\bar{\partial}$-$L^2$-cohomology $\mathcal{H}^{0,0}$ と $\mathcal{H}^2(\mathcal{X})$ の対応をみればよい。（この事実も織田氏による）以上表現論については、Warner, Okamoto-Narasimhan 等を参照されたい。ここでは紙数の関係で述べられない。

§2. 予想1は、$Sp(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2)$ については、$\chi$ が1次元の時は（十分高いweightで）正しい。（橋本喜一朗氏との共同研究）。$SL_2(\mathbb{R})$ と $SU(2)$ については、Eichler の古典的な結果である。$n \geq 3$ の部分的な結果は既に[6]に述べた。次にHecke環のactionを考えるためにnew formの空間を考える。

$$S^0_\chi(B) = \Big(\sum_{\#(\theta)=1} S_\chi(U_\theta) \text{ の } S_\chi(B) \text{ 内での直交補空間}\Big)$$

とおく。$S^0_\chi(B')$ も全く同様に定義する。これらを $B$, $B'$ の new form の空間と呼ぶ。$G_A$, $G'_A$ の $U_\theta$, $U'_\theta$ に関する Hecke環は、$p$-part を除き一致しているので、$p$-primary part を $\mathcal{H}$ とかくことにする。

予想2.　$S^{\circ}_{\chi}(U_{\theta})$ と $S^{\circ}_{\chi'}(U_{\theta'})$ は $\mathcal{H}$-module として同型である。

なお、定義により、Hecke環の $p$-part は、各 $BwB$ $(w \in S_{aff})$ が $-1$ 倍として act している。よって、new form と対応する $p$-adic 表現は、いわゆる Steinberg representation である。

予想2については、$SL_2(\mathbb{R})$ と $SU(2)$ が Eichler の古典的結果でわかっている。また $SU(2,1)$ と $SU(3)$ に関する、古関氏の結果もある。rank 2 以上の単純群については、知られている結果は何もないといってよいと思う。($SL_2(\mathbb{R})$ の直積については清水英男先生の結果が良く知られている。)

我々の目標は、Eichler の古典的で美しく、かつ誰にでも手にとるようによくわかる結果を一般化することにある。このためには、単に上の予想を解くだけではなく、具体的に同型を作ってみせることもまた必要であるように思うが、これについては、予想さえたっていないのが現状である。予想1、2は、跡公式によって解かれるのが自然であると思うが、跡公式は、具体的な同型の構成法を与えているとはいいがたいように思うので、これはまた別種の問題であると思われる。あるいは元々無理な問題なのであろうか?

§2. プログラム

この節では、予想1を解くために考え得る1つの方針を述べたい。

2−1 次元についての予想

前章で述べたように、G上の cusp forms の次元公式は、$\bar{J}_\gamma(g^{-1}\gamma g, 0)$ をすべての $\gamma \in \Gamma$ について和をとったものを積分することにより得られるのであった。さて、もう少し詳しく次のことが予想されている。「すべての $\gamma \in \Gamma$ について和をとるかわりに、$\gamma$ の固有値が1の巾根のみからなるものについて和をとればよい？」この予想を信ずる限りは、次元を求めるには結局

(1) 単位元 (or center の元)

(2) elliptic elements (= torsion elements)

(3) quasi unipotent elements (i.e. 何乗かすると巾単)

となる3種の $\Gamma$ の元について考えればよいことになる。従って、$\Gamma$ の元についての和を、上の3つの部分にわけて考えるのが自然である。しかし、前章の次元公式は、再生核の一般論により得られたものであって、$\sum_{\gamma \in \Gamma}$ の部分から、部分和をとりだして積分した時には、収束するかどうかわからない。上述の(1),(2)の形の元については、その部分だけ和をとって積分しても収束することはよく知られている。

よって最初に問題となるのは。

<u>問題</u>　$\Gamma_{qu}$ で $\Gamma$ の quasi-unipotent elements 全体の集合をあらわすとき、

$$\int_{\Gamma\backslash G}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma_{qu}} f_\chi(g^{-1}\gamma g, 0)\Big)\,dg < \infty$$

を示せ。

ということになる。（もう少し詳しい定式化は後で述べる）

次に、$G'$ 上の保型形式の次元との比較について考える。Langlands の stable conjugacy class についての予想に従えば、$G$, $G'$ の元の共役類のうち、$G_{\mathbb{C}} = G'_{\mathbb{C}}$ 上同一となるものどうしを比較するのが自然である。たとえば、$G'$ が compact と仮定するならば、$G'$ のすべての元は semi-simple であるから、$G$ に関する quasi-unipotent 共役類の寄与は、消滅しているはずである。もっと正確に述べれば、予想1の左辺の個々の項（1つの離散群に関する保型形式の次元）への quasi-unipotent の寄与は、たいてい<u>消えない</u>けれども、交代和をとった後には、消えていると予想される。よって、elliptic elements のことはしばらく忘れて、quasi-unipotent だけを問題とする限り、$G'$ を考慮に入れず、$G$ だけで、寄与の消滅を考慮することが問題になる。

2-2. quasi-unipotent elements

前節で述べたことを実行するためには，quasi-unipotent elements についてもう少し詳しくみる必要がある。この節では，central quasi-unipotent elements の定義，その階数，また分類，について述べる。以下では，$\Gamma$ は $\Gamma_\theta$ のいずれかとしておく。また，$G_{\mathbb{Q}}$ で $G$ の $\mathbb{Q}$-valued points をあらわす。

<u>定義</u>　$\gamma \in \Gamma$ を $\gamma = \gamma_s \gamma_u$　($\gamma_s$ : s.s. $\gamma_u$ : unipotent) と $G_{\mathbb{Q}}$ 内で Jordan 分解したときに，$\gamma_u$ が $G_{\mathbb{Q}}$ のある maximal parabolic subgroup $/\mathbb{Q}$ の unipotent radical の center に属するとき，$\gamma$ を central ということにする。更に $\gamma$ が quasi-unipotent（すなわち $\gamma_s$ が torsion）ならば $\gamma$ を central quasi-unipotent という。

$S_x(\Gamma)$ への quasi-unipotent elements の寄与は，central なもののみ消えないと予想されるので，以下，central quasi-unipotent のみを問題とする。さて，central quasi-unipotent elements をすべて同時に扱うとすると，幾何学的には，異なる次元の cusp を同時に扱っていることになり，あまり適当とは言えない。従って，これを次元の同じ cusp ごとにわけるために，「階数」という概念を導入したい。このために，まず $G$ の standard maximal $\mathbb{Q}$-parabolic subgroups 全体を（適当な，

minimal $\mathbb{Q}$-parabolic subgroup について)とりだして.

$$P_1, \quad \cdots, \quad P_n$$

とする。$P_i$ の unipotent radical の center を $U_i$ と書く。番号をつけかえて. $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n$ となっていると仮定してよい。($G/K$ が有界対称領域という仮定を用いている。)

<u>定義</u> central quasi-unipotent element $\gamma \in \Gamma$ について.
$\gamma_u$ ($\gamma$ の unipotent part) の適当な $G_{\mathbb{Q}}$ 共役が $U_r$ に属するが. $\gamma_u$ のどのような $G_{\mathbb{Q}}$-共役も $U_{r-1}$ には属さないとき. $\gamma$ の階数を $r$ という。

注意点として. 以上で $P_r$ の決める cusp の次元は. $G_{\mathbb{Q}}$ によりいろいろ変わるので. (また $P_i$ の個数 $n$ もいろいろ変わるので) $r$ の代わりに. もっと次元の状態をよくあらわす数を用いるべきかもしれないが. 以下では. 次元はあまり問題にならないので上のように定義しておいた。

次に rank $r$ の central quasi-unipotent elements の分類について述べる。まず

$$(*) \qquad G_{\mathbb{Q}} = \coprod_{w} \Gamma w P_r \qquad (\text{disjoint})$$

とdouble coset分解しておく。右辺は有限個のdouble cosetからなり，各double cosetは$\Gamma\backslash G/K$のSatake compact化のcuspと対応している。簡単のため，次の記号を導入する。

$$C_r^{qu} \;,= \{ G_{\mathbb{Q}} \text{の rank } r \text{ の } \underline{\text{central}} \text{ quasi-unipotent elements} \}$$

この集合を各cuspごとに分割することを考える。すなわち，前記(＊)の代表元$w$に対して，

$$D_r^{qu}(w) = \{ \gamma \in \Gamma \cap w P_r w^{-1} \cap C_r^{qu} \;;\; w^{-1}\gamma_u w \in U_r \}$$

$$C_r^{qu}(w) = \{ \delta^{-1}\gamma\delta \;;\; \gamma \in D_r^{qu}(w),\; \delta \in \Gamma \}$$

とおく。($\gamma_u$は$\gamma$のunipotent part)この時，たいていの群$G$については(e.g. $Sp(n,\mathbb{Q})$)次がなりたつ。

$$C_r^{qu} \cap \Gamma = \coprod_w C_r^{qu}(w) \qquad (\text{disjoint})$$

(ここで「たいていの」と書いたのは，rank $r$の元が$U_r$内で"generic"ということにあたる群論的性質を仮定すると いう意味で，一般に正しいと思われるが検証できていないので上のように書いた。)すると問題は，次のような積分，

$$I(C_r^{gu}(w),\chi) = \int_{\Gamma\backslash G} \Big( \sum_{\gamma\in C_r^{gu}(w)} f_\chi(g^{-1}\gamma g, 0) \Big)\, dg$$

の収束とその寄与を考察することに帰着する。上の積分は，（Γに多少条件をつける限り）実は，Γ自身ではなく，

$$\Gamma \cap wP_rw^{-1}$$

のみによっていることがわかる。我々の目的は，次元を具体的に計算することではなく，寄与の消滅を言うことであるので，以下では $\Gamma\cap wP_rw^{-1}$ を求めることのみが重要になるのである。（なお，くりかえしになるが，上の積分自身は，一般に0ではない。交代和をとってはじめて0になる。）

<u>問題</u>　積分 $I(C_r^{gu}(w),\chi)$ は収束するか？

勿論，答はyesであってほしい。しかし一般論は知られていないと思う。$G=Sp(n,\mathbb{Q})$ については，Shintani [4] により，$C_r^{gu}(w)$ を unipotent-elements に制限した集合，$C_r^{u}(w)$ でおきかえれば，正しいことが証明できる。（[6]）（但し $\chi$ は，$\det(cz+d)^k$ で決まる $k$ の十分大きな保型因子と仮定している。$\chi$ が一般では $Sp(n,\mathbb{Q})$ でも知られていないと思う。）この問題は，概均質ベクトル空間の理論と関係があ

り．それ自身大変面白い問題と思われる。

2-3 cusp について．

前節に述べたように．quasi-unipotent の分類は．cusp の分類と密接な関係がある。我々の関心からすれば．単に cusp の個数を求めるだけでなく．どのような cusp の代表がとれるか．いいかえると $\Gamma \cap w P_r w^{-1}$ はどう記述されるか．という点が知りたい。さて．

$$\Gamma \backslash G / P_r$$

の代表を求める自然な方法は．むしろ G のアデール化をして話を local に考える方が自然に思われる。実際．G 及び P にかなり強い形の近似定理を仮定すれば．完全に local theory に帰着する場合もある。（e.g. $Sp(n, \mathbb{Q})$）しかし．今の所．十分一般的でかつ十分実用的な判定法（global と local のズレの記述法）がわかっていないので．この部分は将来の問題として省略し．local な問題を述べる。以下

G：標数 0 の局所体 k 上の半単純代数群

P：G の maximal parabolic subgroup / k

$S_{aff}$：G の affine Weyl 群の generator system

$\theta \subset S_{aff}$，B：G の minimal parahoric subgroup

$U_\theta$：B を含む（θ と対応する）standard parahoric

以上のもとで

問1. $U_\theta \backslash G/P$ のよい記述を与えよ。

問2. $\sum_{\theta \subsetneq S_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} \#(U_\theta \backslash G/P) = 0$ を示せ

問3. $\mathcal{S}_\theta := U_\theta \backslash G/P$, $\mathcal{S} := \coprod_{\theta \subsetneq S_{aff}} \mathcal{S}_\theta$ (disjoint)

をおく。この時

$\mathcal{S}$ の order 2 の permutation で次の性質をみたすものはあるか?

(1) $c \in \mathcal{S}_\theta$ かつ $\iota(c) \in \mathcal{S}_\varphi$ なら

$$\#(\theta) = \#(\varphi) + 1$$

(2) $g, h$ をそれぞれ $c, \iota(c)$ の $G$ での代表とすると

$g^{-1} U_\theta g \cap P$ と $h^{-1} U_\varphi h \cap P$ は $P$-共役.

(但し $\theta, \varphi$ は上の通り)

以上 $Sp_n$, $SL_n$ なら正しい。特に $Sp(n, \mathbb{Q})$ については global theory との対応を正確にかけて, minimal parabolic subgroup に属する $\mathbb{C}$-valued cusp forms の new forms への central unipotent elements の寄与は0になる。なお, 問1については, 計算が完了している例については皆

$$\pi(W_\theta) \backslash W / W_P \simeq U_\theta \backslash G/P$$

($\pi : W_{aff} \to W$ は natural projection)

という形で parametrize されている。ここで $W$ は $G$ の Weyl 群, $W_P$, $W_\theta$ はそれぞれ $P$ 及び $U_\theta$ に対応する $W$, 及び $W_{aff}$ (affine Weyl gp) の Coxeter subgroup である。完全に一般の群で正しいと思われる。

以上で, central quasi-unipotent については, 一応のプログラムがあるといってよいと思う。つまり, (1) 収束の証明 (2) 上の問 1, 2, 3 を解くこと (3) local theory から global theory を適当な類数を modulo にもつなぐこと。実際に $Sp(n, Q)$ ではこれらが暗示されるので $Sp(n, Q)$ については完了していることになる。収束という大変解析的な内容は, 証明の方針が十分わかっているとは言いがたいが上の問 1～3 については, 代数群の算術であるので, 少くとも具体的に群 $G$ を与える限り実行可能であって, 個々の例を調べることができる。( $Sp(n, Q)$ については [6] を参照)

2－4 残された問題

以上 central quasi-unipotent に限って話をすすめたが, 残りの元については, プログラムはより漠然としている。まず $\Gamma$ の center の元については, 最近の Kottwitz の玉河数についての結果から, $G$ と $G'$ の寄与が等しいことが一般的に証明されるであろう。( $Sp(n, Q)$ については勿論正しい。他の場

合の試みについては[7]を参照されたい。）また、elliptic elements については、その centralizer の Weyl 群で記述する方法があるのではないかと思う。以上ができたと仮定して更に hyperbolic elements 等の寄与が個々の Γ についてはじめから消えていることを言う必要があるが、私には、この部分が一番よくわからない部分である。Eisenstein series の一般論等と群論的な内容と両方用いて解析的な評価をおこなう必要があるのではないかと思われる。たとえ代数幾何学を援用して消滅がいえる特殊な Γ があるとしても、やはり群論と解析の枠内で証明できることが望ましいと思うが、よくわからない。

2－5　副産物（Satake compact 化）

2－3 節で考えた問題を解くことにより、$\Gamma\backslash G/K$ の Satake compact 化内での cusp の様子を統一的に記述することが可能になる。たとえば $Sp(n,\mathbb{Q})$ については、次の問題をすべて解くことができる。

$\Gamma_\theta \subset Sp(n,\mathbb{Q})$ を 2－1 の通りとし、c を maximal parabolic subgroup $P$ に関する $\Gamma_\theta$ の cusp とする。

(1)　c の決める cusp の component を記述すること

(2)　$\Gamma_\theta$ の 2 つの（次元が異なる）cusp c, d があると

き．cusp $d$ が cusp $c$ 上にある条件を書くこと。

(3) $\theta \subset \varphi$ の時 $\overline{\Gamma_\theta \backslash G/K} \to \overline{\Gamma_\varphi \backslash G/K}$ なる natural projection での cusp $c$ の行先がどのような cusp になるか記述すること。

以上，すべて Dynkin 図形上の適当な「絵」を用いて記述することができ $\Gamma_\theta$ の cusps は"n-方体"の一部と見えるが詳しくは [6] を参照されたい。

文献


[1] I. Satake, Algebraic Structures of Symmetric Domains Iwanami (1980)

[2] W.L. Baily, Introductory Lectures on Automorphic forms Iwanami (1973)

[3] H.Shimizu, 保型函数，岩波基礎数学講座

[4] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 22 (1975)

[5] K. Hashimoto & T. Ibukiyama On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,R)$ and its compact twist $Sp(2)$ (II)

Adv. Studies in pure Math Vol. 7 (1985) Kinokuniya

[6] T. Ibukiyama

保型形式の次元へのユニポテント共役類の寄与の消滅 (数理研講究録 617, 1987)

On some alternating sum of dimensions of Siegel cusp forms of general degree (preprint)

[7] T. Ibukiyama On automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact form $Sp(2)$, Seminaire Th. nombres 1982-83 (Birkhäuser 1984)